

ÍNDICE

1. Introducción
2. Régimen estacionario unidimensional
 - 2.1 Geometrías sencillas
 - 2.2 Sólidos en serie
 - 2.3 Superficies extendidas
3. Régimen estacionario multidimensional
 - 3.1 Método gráfico aproximado
 - 3.2 Método numérico
4. Régimen no estacionario
 - 4.1 Método analítico
 - 4.2 Método numérico

✓ Conducción

Mecanismo complejo de transmisión de calor que transcurre a nivel microscópico y mediante el cual los átomos y moléculas interaccionan a través de choques elásticos e inelásticos que propagan la energía debido a un gradiente de temperatura.

✓ Ley de Fourier:

$$\text{Flujo: } q = -k \cdot \nabla T \longrightarrow q = -k \left(i \frac{\partial T}{\partial x} + j \frac{\partial T}{\partial y} + k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad [1]$$

k: conductividad térmica

α : difusividad térmica

$$\alpha = k / \rho c_p$$

$$\text{Caudal: } Q = -A \cdot k \cdot \nabla T \xrightarrow{\substack{| \\ \text{1 DIM.}}} q = -k \frac{dT}{dx} \therefore Q = -A \cdot k \cdot \frac{dT}{dx}$$

	Conducción	Convección	Radiación
Sólido	Sí	No	No
Fluido	Sí (↓)	Sí (↑)	Sí (↑)

✓ TC en sólidos (conducción):



✓ Ecuación de conservación de cualquier propiedad extensiva:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \nabla(\Pi \cdot \vec{v}) = -\nabla\phi + G \quad [2]$$

Acumulación Transporte por convección Transporte molecular Generación

✓ Sólidos (v=0):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\nabla\phi + G \quad [3]$$

✓ Energía:

- Π : concentración de energía, $\rho c_p T$,
- ϕ : flujo de calor (Ley de Fourier), $-k \nabla T$,
- G : generación de calor por unidad de volumen y tiempo por efecto Joule o reacciones nucleares, por ejemplo.

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$

✓ Solución de problemas de TC en sólidos:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G$$

Condiciones de contorno
Condiciones iniciales

Integración

Perfil de
temperatura

Ley de Fourier

Caudal y flujo

✓ Clasificación problemas de TC en sólidos:

- **Temperatura – tiempo:**
 - Régimen estacionario: T no varía con t.
 - Régimen no estacionario: T varía con t.
- **Temperatura – coordenadas espaciales:**
 - Unidimensional: T varía con una coordenada.
 - Bidimensional: T varía con dos coordenadas.
 - Tridimensional: T varía con tres coordenadas.
- **Generación de energía:**
 - Sin generación (Conducción simple): G=0
 - Con generación G≠0.

✓ Soluciones de la ECE

- **Analítica** (dos variables y geometría sencilla).
- **Métodos numéricos.**
- **Métodos gráficos aproximados.**
- **Métodos analógicos** (Ley de Ohm y Fourier).
- **Analíticos aproximados.**

ÍNDICE

1. Introducción
2. Régimen estacionario unidimensional
 - 2.1 Geometrías sencillas
 - 2.2 Sólidos en serie
 - 2.3 Superficies extendidas
3. Régimen estacionario multidimensional
 - 3.1 Método gráfico aproximado
 - 3.2 Método numérico
4. Régimen no estacionario
 - 4.1 Método analítico
 - 4.2 Método numérico

✓ Introducción:

- Solución analítica viable
- Análisis de casos y metodología

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$

Régimen estacionario



$$0 = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [5]$$

✓ Casos:

- **Geometrías sencillas**
 - Conducción sin generación
 - Sección de paso constante y variable
 - Conductividad constante y variable
 - Conducción con generación
- **Sólidos en serie**
- **Superficies extendidas**

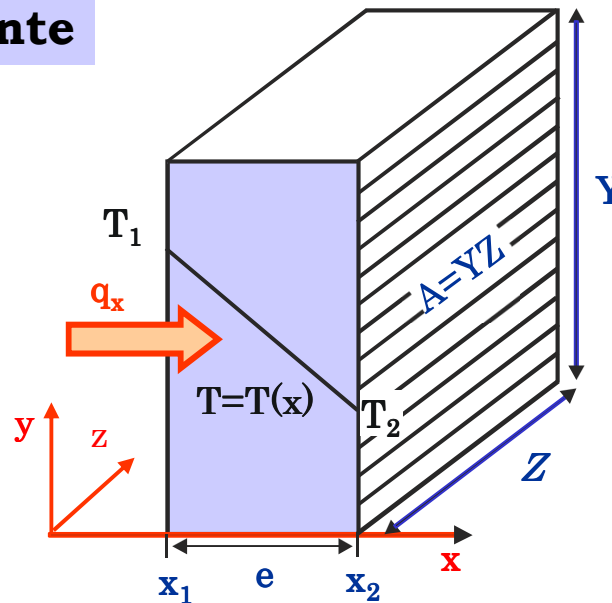
2.1.1 Conducción sin generación

✓ Ecuación general de conservación de energía:

$$0 = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [5] \quad \xrightarrow{G=0} \quad \nabla(-k \cdot \nabla T) = 0 \quad [6] \quad \xrightarrow{k = \text{cte}} \quad \nabla^2 T = 0 \quad [7]$$

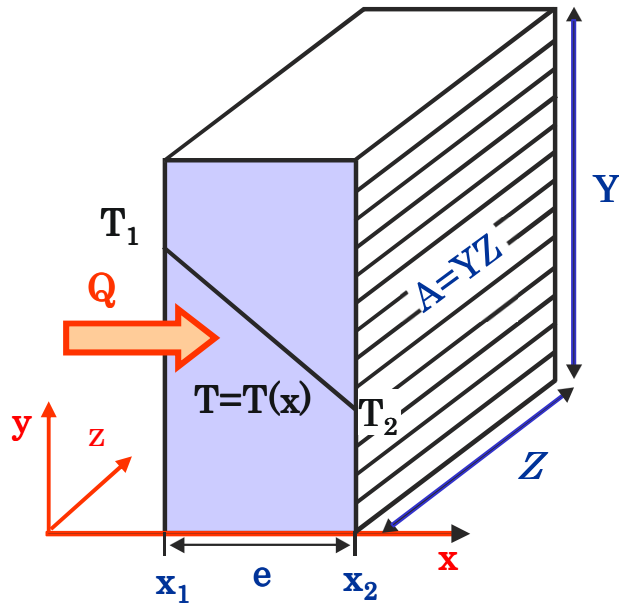
Ecuación de Laplace

Sección de paso constante



2.1.1 Conducción sin generación

Sección de paso constante



Modelo matemático

Condiciones de contorno

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad [8]$$

$$T(x_1, t) = \quad [9]$$

$$T(x_2, t) = \quad [10]$$

Perfil de Temperaturas

$$T(x) = \frac{T_1 - T_2}{x_1 - x_2} (x - x_1) + T_1 \quad [11]$$

Flujo de calor

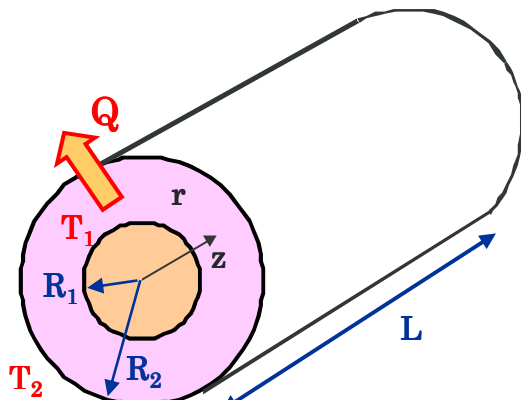
$$q = -k \cdot \nabla T = -k \cdot \frac{dT}{dx} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{x_2 - x_1} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k}} \quad [12]$$

Caudal de calor

$$Q = q \cdot A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot A}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\text{Fuerza Impulsora}}{\text{Resistencia}} \quad [13]$$

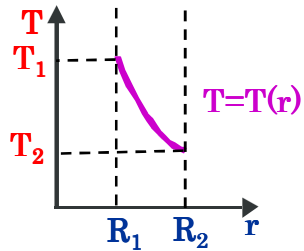
2.1.1 Conducción sin generación

Sección de paso variable: *Geometría cilíndrica*



$$L \gg R_2$$

$$A(r) = f(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \quad [14]$$



$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot A_{ml}}} \quad [21]$$

$$A_{ml} = \frac{A_2 - A_1}{\ln \frac{A_2}{A_1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_2 - 2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1}{\ln \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_2}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (R_2 - R_1)}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Modelo matemático

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad [15]$$

$$T(R_1, t) = \quad [16]$$

$$T(R_2, t) = \quad [17]$$

Perfil de Temperaturas

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \cdot \ln \frac{r}{R_1} \quad [18]$$

Flujo de calor

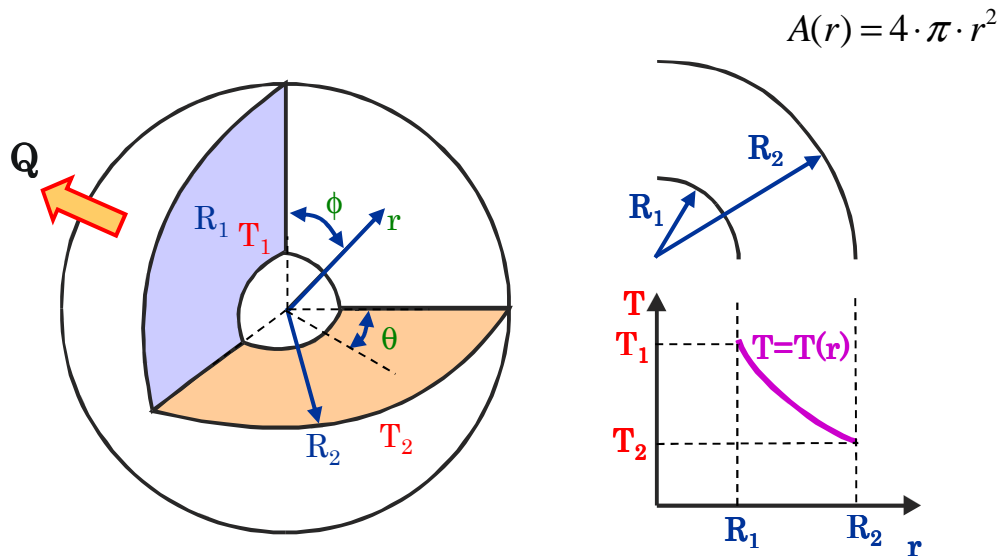
$$q(r) = -k \cdot \nabla T = -k \cdot \frac{dT}{dr} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} \quad [19]$$

Caudal de calor

$$Q = q(r) \cdot A(r) = k \cdot (2 \cdot \pi \cdot L) \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad [20]$$

2.1.1 Conducción sin generación

Sección de paso variable: *Geometría esférica*



$$A_{mg} = \sqrt{A_1 \cdot A_2} = \sqrt{(4 \cdot \pi \cdot R_1^2) \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_2^2)} = 4 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot R_2$$

Modelo matemático

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad [22]$$

$$T(R_1, T) = T_1 \quad [23]$$

$$T(R_2, t) = T_2 \quad [24]$$

Perfil de Temperaturas

$$T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) \quad [25]$$

Flujo de calor

$$q(r) = -k \cdot \frac{dT}{dr} = k \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad [26]$$

Caudal de calor

$$Q = q(r) \cdot A(r) = k \cdot (4\pi) \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad [27]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k \cdot A_{mg}}} \quad [28]$$

2.1.2 Conducción sin generación

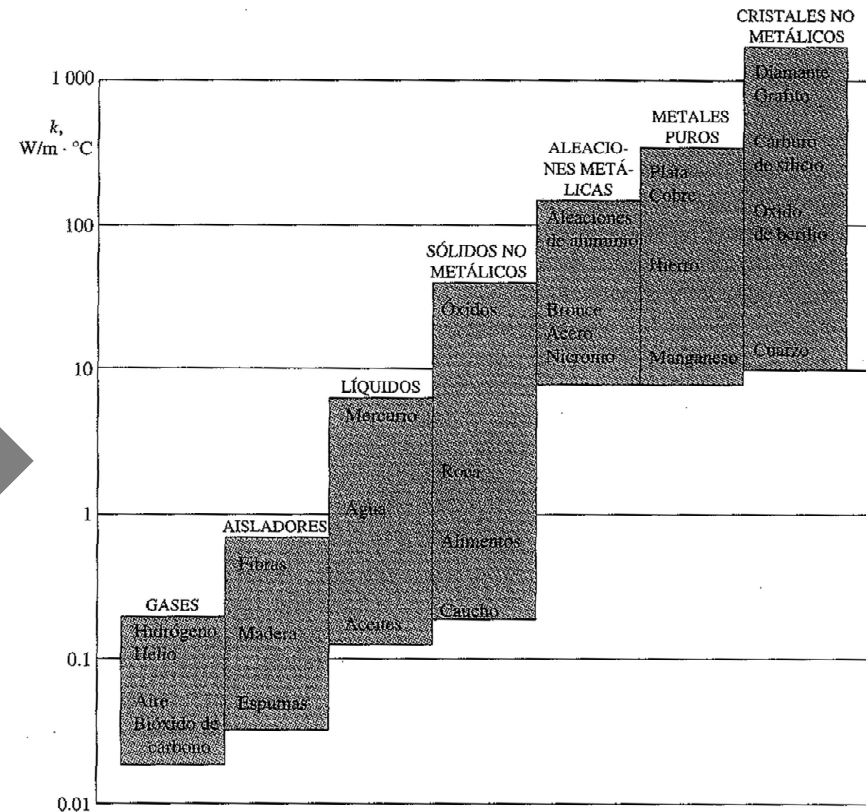
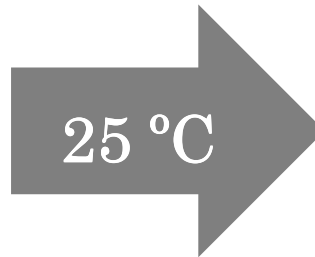
Conductividad variable

TABLA 1-1

Conductividades térmicas de algunos materiales a la temperatura ambiente

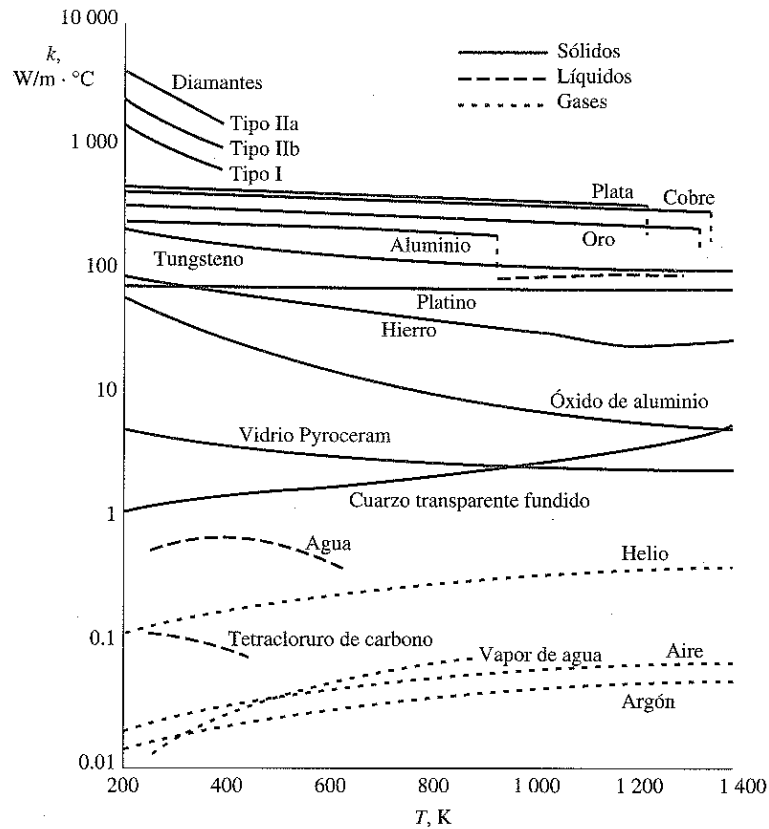
Material	k , W/m · °C*
Diamante	2 300
Plata	429
Cobre	401
Oro	317
Aluminio	237
Hierro	80.2
Mercurio (l)	8.54
Vidrio	0.78
Ladrillo	0.72
Agua (l)	0.613
Piel humana	0.37
Madera (roble)	0.17
Helio (g)	0.152
Caucho suave	0.13
Fibra de vidrio	0.043
Aire (g)	0.026
Uretano, espuma rígida	0.026

*Multiplíquese por 0.5778 para convertir a Btu/h · ft · °F.



2.1.2 Conducción sin generación

Conductividad variable



$$k_{Promedio} = \frac{\int_{T_1}^{T_2} k(T) dT}{T_2 - T_1}$$

$$k(T) = k_0(1 + \beta T)$$

$$k_0\beta \equiv a$$

$$k_0 \equiv b$$

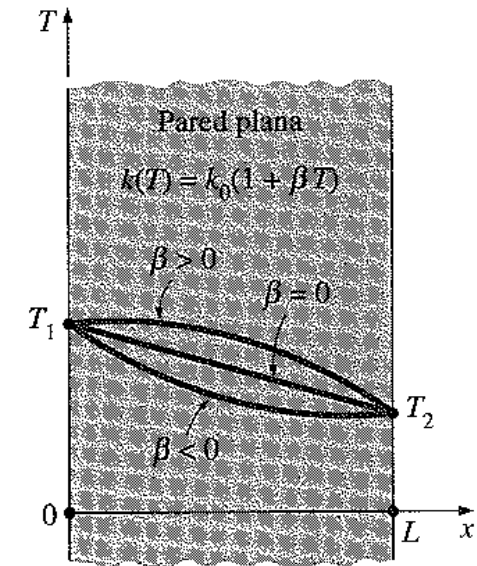


FIGURA 2-63

Variación de la temperatura en una pared plana durante la conducción

2.1.2 Conducción sin generación

Conductividad variable

Ejemplo:

- Resistencia lineal $k(T) = a \cdot T + b$ [29]
- Geometría plana $\nabla(k \cdot \nabla T) = 0$ [30]

Integrando

Perfil de temperatura

$$\frac{a}{2} \cdot T^2 + b \cdot T = \frac{\frac{a}{2}(T_1^2 - T_2^2) + b(T_1 - T_2)}{(x_1 - x_2)} \cdot (x - x_1) + \frac{a}{2} \cdot T_1^2 + b \cdot T_1 \quad [31]$$

Caudal de calor

$$Q = k_{ma} \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_2}{e} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k_{ma} \cdot A}} \quad [32]$$

Generalización
unidimensional y geometría sencilla

$$Q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{k_m \cdot A_m}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\text{Fuerza impulsora}}{\text{Resistencia}} \quad [33]$$

$$I = \frac{\Delta V}{R} \quad [34] \quad \text{Ley de Ohm}$$

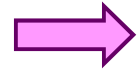
Fundamento de analogía:
electricidad y transporte de calor

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.1 Geometrías sencillas

2.1.2 Conducción con generación

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$



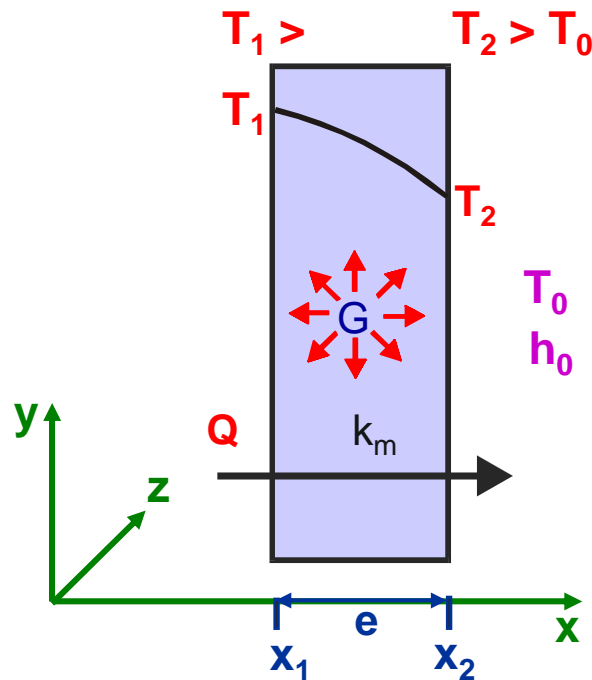
$$\nabla \cdot (k \cdot \nabla T) + G = 0 \quad [35]$$

$k_m = \text{cte}$



$$k_m \nabla^2 T + G = 0$$

Geometría plana rectangular



Enfriamiento
newtoniano

Modelo matemático

$$k_m \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + G = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{G}{k_m} \quad [37]$$

$$T(x_1, t) = T_1 \quad [38]$$

$$-k \cdot \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=x_2} = h_0 \cdot (T_2 - T_0) \quad [39]$$

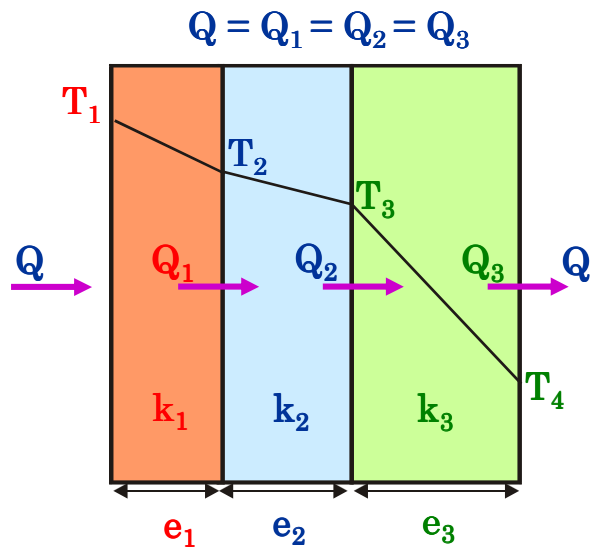
Perfil de Temperaturas

$$T = \frac{G}{k_m} \cdot (x - x_1) \cdot \left[x_2 - \frac{x + x_1}{2} - \frac{h_0}{G} \cdot (T_2 - T_0) \right] + T_1 \quad [40]$$

Flujo de calor

$$q = G \cdot (x - x_2) + h_0 \cdot (T_2 - T_0) \quad [41]$$

Geometría plana rectangular



Caudal de calor

$$Q = \frac{\Delta T_1}{R_1} = \frac{\Delta T_2}{R_2} = \frac{\Delta T_3}{R_3} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{k_{m1} \cdot A_{m1}}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{k_{m2} \cdot A_{m2}}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{k_{m3} \cdot A_{m3}}} \quad [42]$$

$$Q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{k_{m1} \cdot A_{m1}} + \frac{e_2}{k_{m2} \cdot A_{m2}} + \frac{e_3}{k_{m3} \cdot A_{m3}}} = \quad [43]$$

$$\frac{\sum \Delta T_i}{\sum R_i} = \frac{\text{Fuerza impulsora total}}{\text{Resistencia total}}$$

Resistencias de contacto/convección

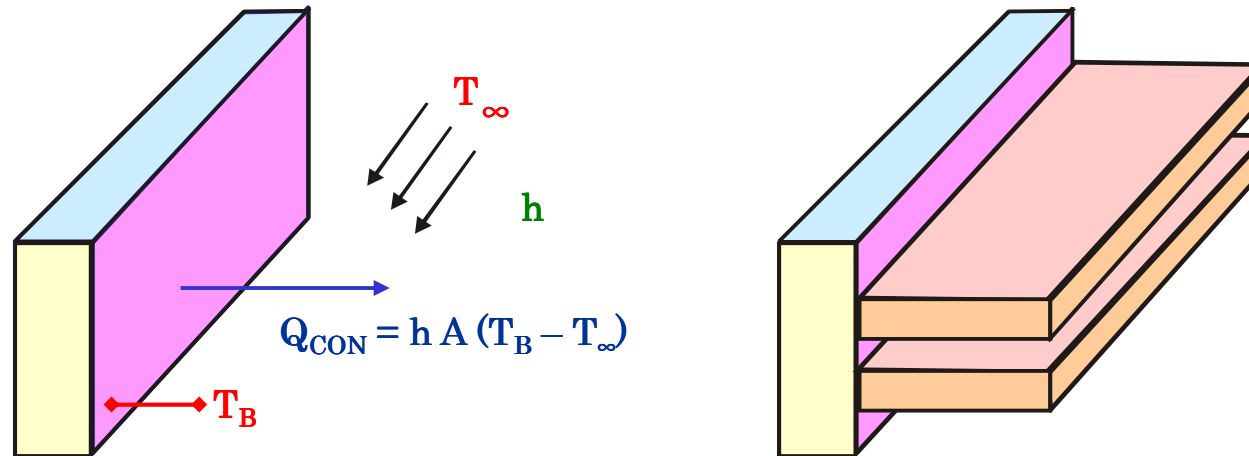
$$R = \frac{1}{h_c \cdot A_m} \quad [43]$$

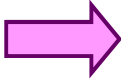
2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

✓ Superficies extendidas

Sólido que está sometido a transporte de calor por conducción a través del mismo y simultáneamente a transporte de energía por convección y/o radiación con un fluido que lo rodea.

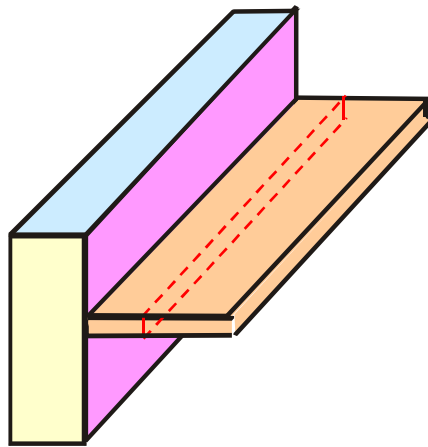


Aumento de Q :  {

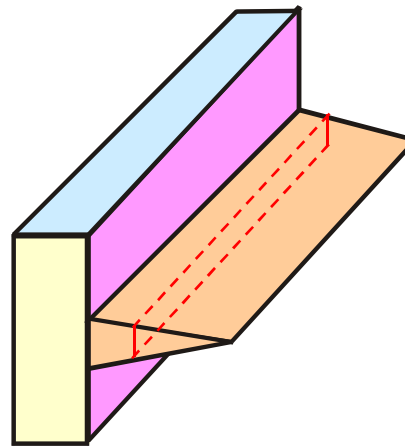
- Aumentar h
- Aumentar ΔT
- Aumentar A : superficies extendidas

✓ Superficies extendidas

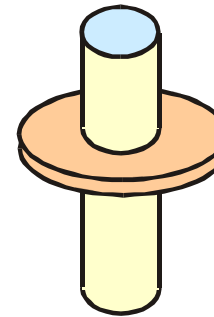
- **Ejemplos:** radiadores de calefacción, motores, disipadores CPUs...
- **Problema:** resistencia adicional a TC (a través del sólido – aleta –).
- **Conductividad térmica** del material: parámetro clave.
- Aletas de diferentes **formas**.



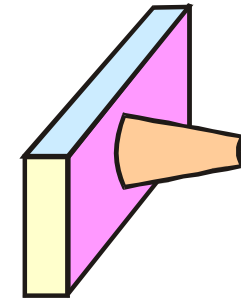
Rectangular
sección constante



Rectangular
sección variable



Anular

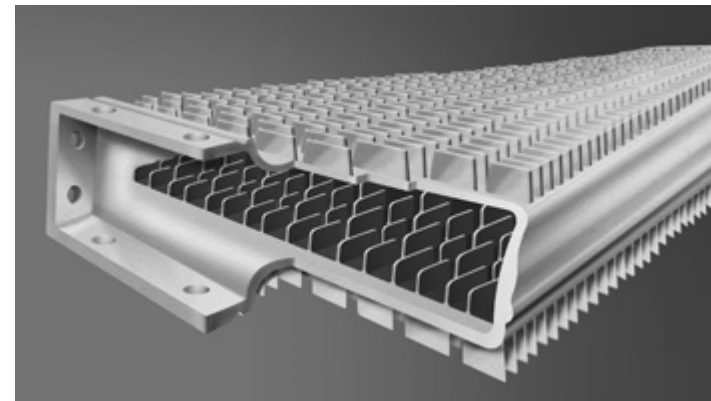
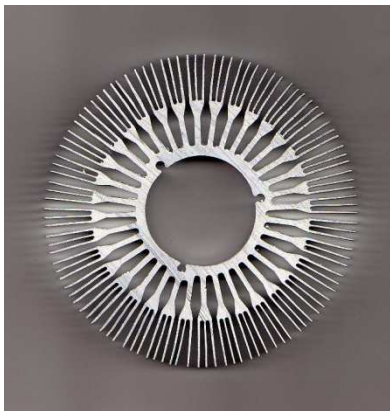


Aguja

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

✓ Superficies extendidas



✓ Selección de la aleta

- Espacio
- Peso
- Fabricación
- Costes
- ...

✓ Información importante

- La superficie extendida (aleta) **¿mejora o empeora la velocidad de transporte de calor entre el sólido y el fluido?**

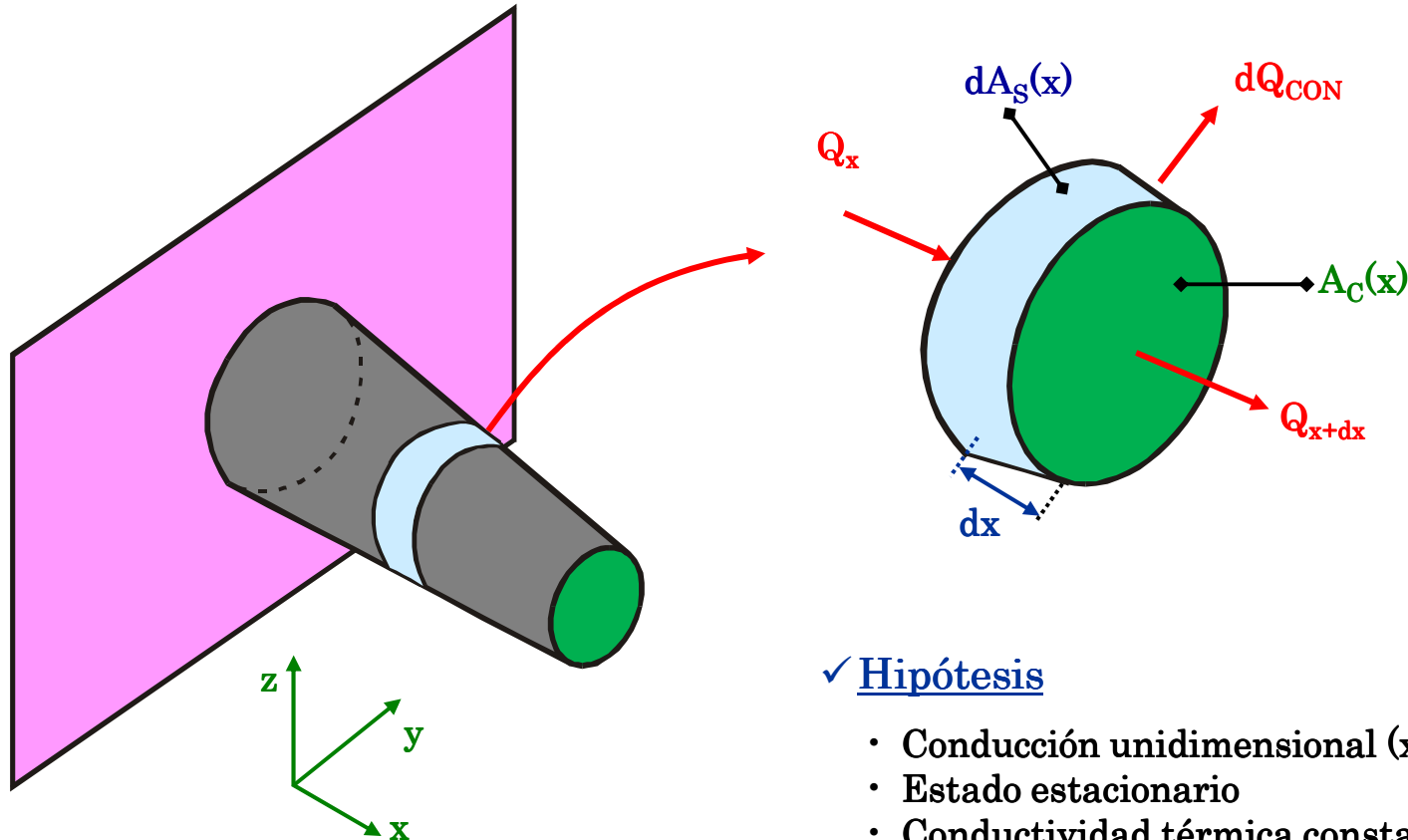
✓ Proceso

1. Determinar la distribución de **temperaturas** en la aleta.
2. Evaluar la **eficacia** de la aleta.

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aletas de sección transversal no uniforme



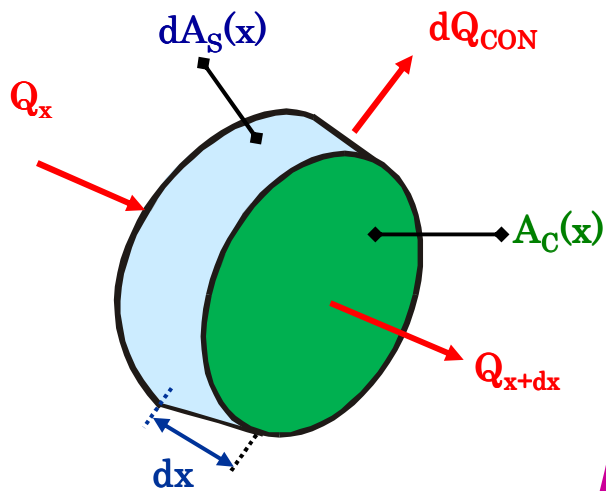
✓ Hipótesis

- Conducción unidimensional (x)
- Estado estacionario
- Conductividad térmica constante
- Radiación desde la superficie despreciable
- Sin generación de energía

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aletas de sección transversal no uniforme



✓ Ecuación de conservación de energía (ECE):

$$Q_x = Q_{x+dx} + dQ_{con} \quad [46]$$

✓ Ley de Fourier:

$$Q_x = -k \cdot A_c \cdot \frac{dT}{dx} \quad [47]$$

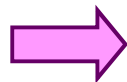
$$Q_{x+dx} = Q_x + \frac{dQ_x}{dx} \cdot dx = -k \cdot A_c \cdot \frac{dT}{dx} - k \cdot \frac{d}{dx} \left(A_c \cdot \frac{dT}{dx} \right) \cdot dx \quad [48]$$

✓ Convección con el fluido:

$$dQ_{con} = h \cdot dA_s \cdot (T - T_\infty) \quad [49]$$

✓ [47-49] en [46]

$$\frac{d}{dx} \left(A_c \cdot \frac{dT}{dx} \right) - \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_s}{dx} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [50]$$



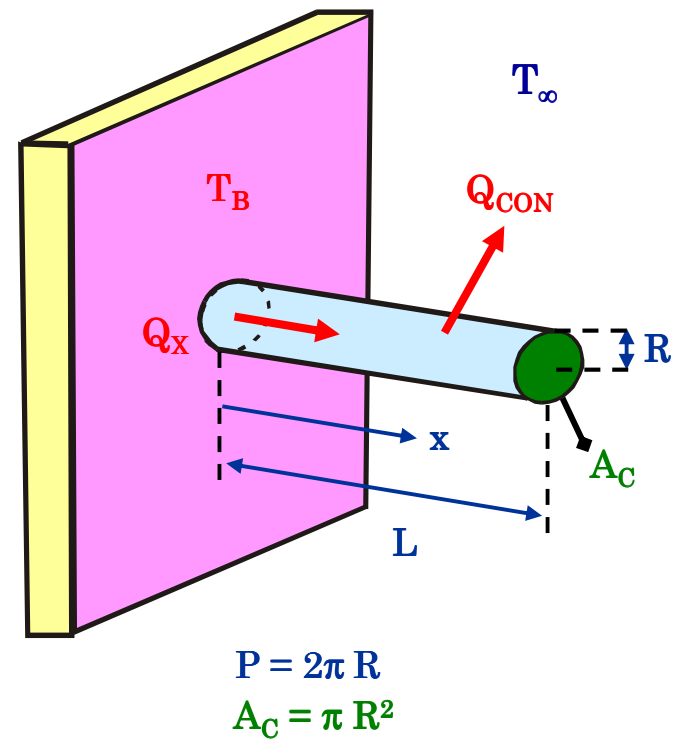
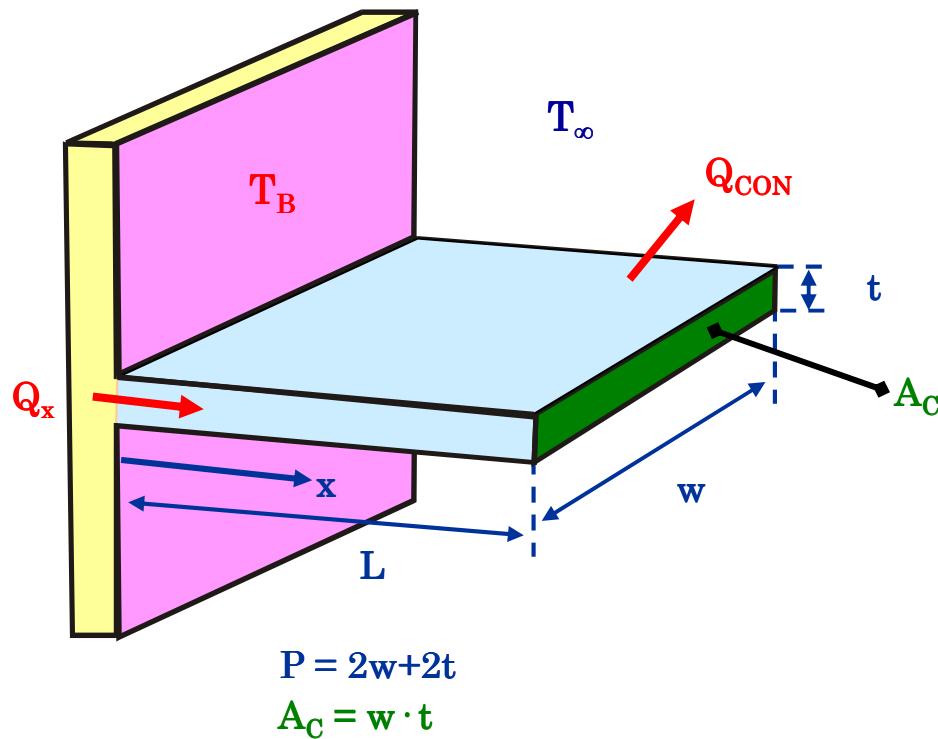
$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{dA_c}{dx} \right) \cdot \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_c} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_s}{dx} \right) \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [51]$$

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aletas de sección transversal uniforme ($A_C = \text{cte}$)

$A_S = P \cdot x$ [52]



Aletas de sección transversal uniforme ($A_C = \text{cte}$)

✓ Ecuación general:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_C} \cdot \frac{dA_C}{dx} \right) \cdot \frac{dT}{dx} - \left(\frac{1}{A_C} \cdot \frac{h}{k} \cdot \frac{dA_S}{dx} \right) \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [51]$$

✓ Simplificaciones:

- $A_C = \text{cte} \rightarrow dA_C/dx = 0$
- $A_S = P \cdot x \rightarrow dA_S/dx = P$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{k \cdot A_C} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [53]$$

✓ Condiciones límite:

1. Base de la aleta

$$x = 0 \quad T = T_B \quad [54]$$

2. Extremo libre de la aleta. Opciones:

A) Balance de energía en el extremo (convección):

$$x = L \quad - \left(k \cdot A_C \cdot \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h \cdot A_C \cdot (T_L - T_\infty) \quad [55]$$

B) Extremo adiabático:

$$x = L \quad \frac{dT}{dx} = 0 \quad [56]$$

C) Temperatura conocida:

$$x = L \quad T = T_L \quad [57]$$

D) Superficie extendida de gran longitud:

$$x = L \quad (L \rightarrow \infty) \quad T_L = T_\infty \quad [58]$$

Aletas de sección transversal uniforme

Perfil de temperatura y caudal de calor intercambiado en la aleta

- Perfil de temperaturas: solución ecuación [53]

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{k \cdot A_C} \cdot (T - T_\infty) = 0 \quad [53]$$

- Caudal de calor:

$$Q_A = \int_{A_A} h \cdot (T - T_\infty) \cdot dA_S \quad [59]$$

Caso	Distribución Temperatura θ/θ_B	Caudal calor Q_A
A	$\frac{\cosh m \cdot (L - x) + (h/mk) \cdot \sinh m \cdot (L - x)}{\cosh mL + (h/mk) \cdot \sinh mL}$	$M \cdot \frac{\sinh mL + (h/mk) \cdot \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$
B	$\frac{\cosh m (L - x)}{\cosh mL}$	$M \cdot \tanh mL$
C	$\frac{(\theta_L / \theta_B) \cdot \sinh mx + \sinh m(L - x)}{\sinh mL}$	$M \cdot \frac{\cosh mL - \theta_L / \theta_B}{\sinh mL}$
D	e^{-mx}	M
$\theta = T - T_\infty; \quad \theta_B = \theta(0) = T_B - T_\infty; \quad m^2 = h \cdot P / k \cdot A_C; \quad M = \sqrt{h \cdot P \cdot k \cdot A_C} \cdot \theta_B$		

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

$$Q_A = \int_{A_A} h \cdot (T - T_\infty) \cdot dA_S \quad [59]$$

✓ Desempeño o efectividad de una aleta:

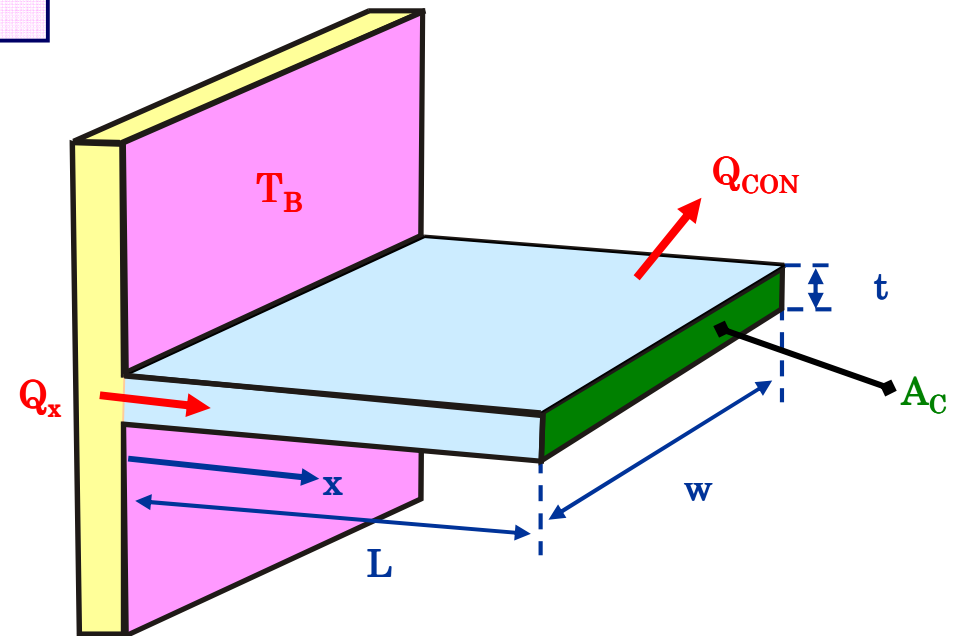
Relación entre el caudal de calor transmitido a través de la aleta al fluido, Q_A , y el que existiría sin aleta:

$$\varepsilon_A = \frac{Q_A}{h \cdot A_{C,B} \cdot (T_B - T_\infty)} \quad [60]$$

✓ Eficiencia de una aleta:

Relación entre el caudal de calor transmitido a través de la aleta al fluido, Q_A , y el máximo posible, Q_{MAX} (si la aleta no ofreciera resistencia al TC y toda su superficie estuviera a T_B):

$$\eta_A = \frac{Q_A}{Q_{MAX}} = \frac{Q_A}{h \cdot A_A \cdot (T_B - T_\infty)} \quad [61]$$



$$P = 2w + 2t$$

$$A_C = w \cdot t$$

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aletas rectas		
<p style="text-align: center;">Rectangular</p> $A_A = 2 \cdot w \cdot L_C$ $L_C = L + (t/2)$		$\eta_A = \frac{\tanh m \cdot L_C}{m \cdot L_C}$
<p style="text-align: center;">Triangular</p> $A_A = 2 \cdot w \cdot \left[L^2 + (t/2)^2 \right]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{1}{m \cdot L} \frac{I_1(2mL)}{I_0(2mL)}$
<p style="text-align: center;">Parabólica</p> $A_A = w \cdot \left[C_1 \cdot L + \left(L^2 / t \right) \cdot \ln (t/L + C_1) \right]$ $C_1 = \left[1 + (t/L)^2 \right]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{2}{\left[4 \cdot (m \cdot L)^2 + 1 \right]^{1/2} + 1}$

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

Aleta circular		
<p style="text-align: center;">Rectangular</p> $A_A = 2 \cdot \pi \cdot (r_{2c}^2 - r_1^2)$ $r_{2c} = r_2 + (t/2)$		$\eta_A = C_2 \frac{K_1(mr_1) \cdot I_1(mr_{2c}) - I_1(mr_1) \cdot K_1(mr_{2c})}{I_0(mr_1) \cdot K_1(mr_{2c}) + K_0(mr_1) \cdot I_1(mr_{2c})}$ $C_2 = \frac{(2 \cdot r_1 / m)}{(r_{2c}^2 - r_1^2)}$
Aleta tipo pin		
<p style="text-align: center;">Rectangular</p> $A_A = \pi \cdot D \cdot L_C$ $L_C = L + D/4$		$\eta_A = \frac{\tanh m \cdot L_C}{m \cdot L_C}$
<p style="text-align: center;">Triangular</p> $A_A = \frac{\pi \cdot D}{2} \cdot [L^2 + (D/2)^2]^{1/2}$		$\eta_A = \frac{2}{[4/9 \cdot (m \cdot L)^2 + 1]^{1/2} + 1}$

2. RÉGIMEN ESTACIONARIO UNIDIMENSIONAL

2.3 Superficies extendidas

✓ Eficiencia global de la superficie:

$$\eta_0 = \frac{Q_T}{Q_{T,MAX}} = \frac{Q_T}{h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty)} \quad [62]$$

- Q_T : Caudal de calor total
- A_T : Área Total
- $Q_{T,MAX}$: Caudal de calor máximo

$$A_T = N \cdot A_A + A_E \quad [63]$$

- N : número de aletas
- A_A : área de cada aleta
- A_E : área de la base expuesta al fluido

$Q_{T,MAX}$: caudal de calor que se obtendría si toda la superficie de las aletas estuviera a la temperatura de la base, T_B . Es suma del transmitido a través de la base expuesta al fluido y de la aleta.

$$Q_T = N \cdot \eta_A \cdot Q_{MAX} + h \cdot A_E \cdot (T_B - T_\infty)$$

$$Q_T = N \cdot \eta_A \cdot h \cdot A_A \cdot (T_B - T_\infty) + h \cdot A_E \cdot (T_B - T_\infty) \quad [64]$$

$$Q_T = h \cdot [N \cdot \eta_A \cdot A_A + (A_T - N \cdot A_A)] \cdot (T_B - T_\infty) \quad [65]$$

$$Q_T = h \cdot A_T \cdot \left[1 - \frac{N \cdot A_A}{A_T} \cdot (1 - \eta_A) \right] \cdot (T_B - T_\infty) \quad [66]$$

Sustituyendo en [62]

$$\eta_0 = \frac{Q_T}{h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty)} = \left[1 - \frac{N \cdot A_A}{A_T} \cdot (1 - \eta_A) \right] \quad [67]$$

$$Q_T = \eta_0 \cdot Q_{T,MAX} = \eta_0 \cdot h \cdot A_T \cdot (T_B - T_\infty) \quad [68]$$

ÍNDICE

1. Introducción
2. Régimen estacionario unidimensional
 - 2.1 Geometrías sencillas
 - 2.2 Sólidos en serie
 - 2.3 Superficies extendidas
3. Régimen estacionario multidimensional
 - 3.1 Método gráfico aproximado
 - 3.2 Método numérico
4. Régimen no estacionario
 - 4.1 Método analítico
 - 4.2 Método numérico

✓ Introducción:

- **Régimen estacionario unidimensional:**
 - Sistemas muy sencillos pero de aplicación real
- **Régimen estacionario multidimensional:**
 - Límites del sistema irregulares
 - Temperatura límites no uniformes
 - Solución analítica: 2 dimensiones y geometría sencilla

✓ Métodos:

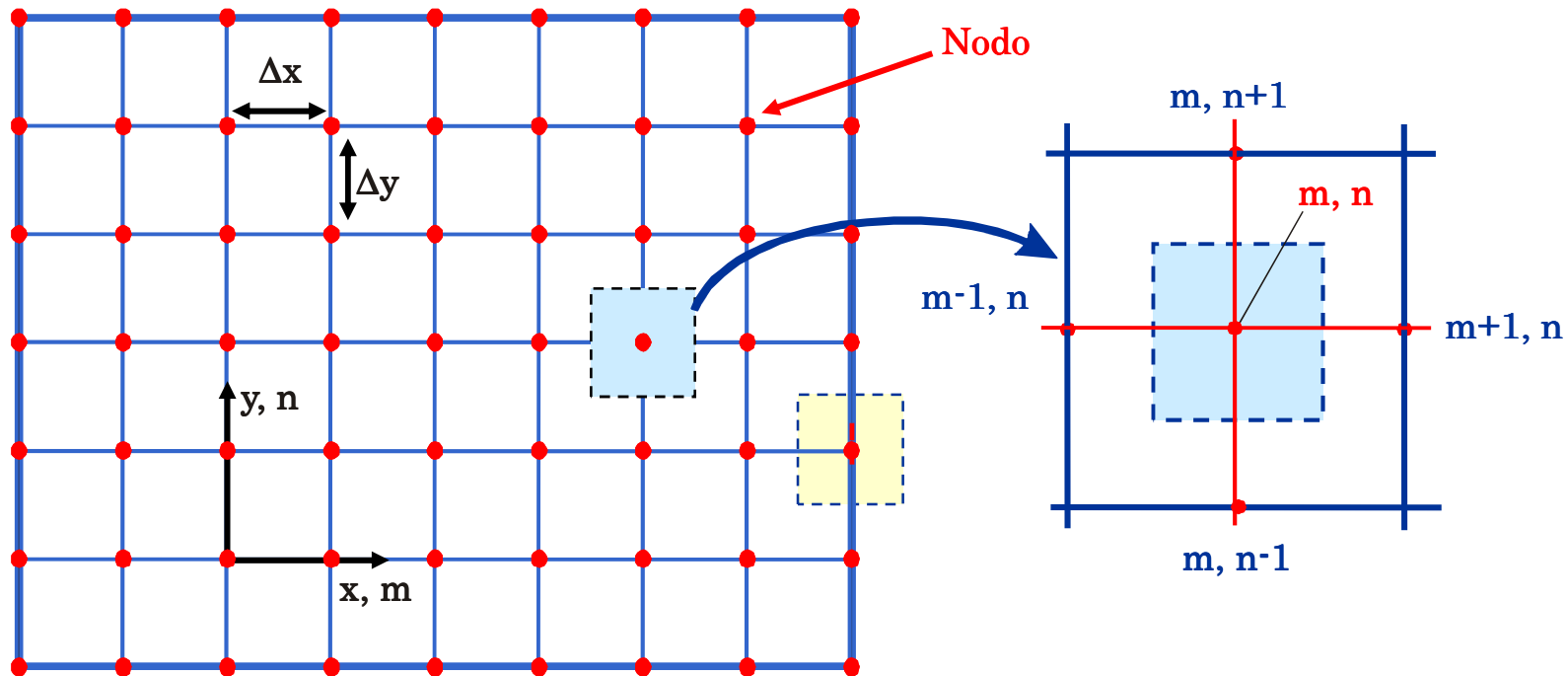
- Analítico
- Gráfico aproximado.
- **Numérico: incrementos finitos**

3.2.1 Red nodal

✓ Construcción de la red nodal:

Dividir el sólido en una serie de celdillas de dimensiones iguales y a ser posible con superficies de mallas paralelas a los límites del cuerpo a analizar.

✓ Ejemplo: Conducción bidimensional (rectangular)



3.2.2 Ecuaciones nodales

✓ Obtención de distribución de temperaturas:

Se obtiene resolviendo la ecuación de conservación de energía en cada uno de los nodos.

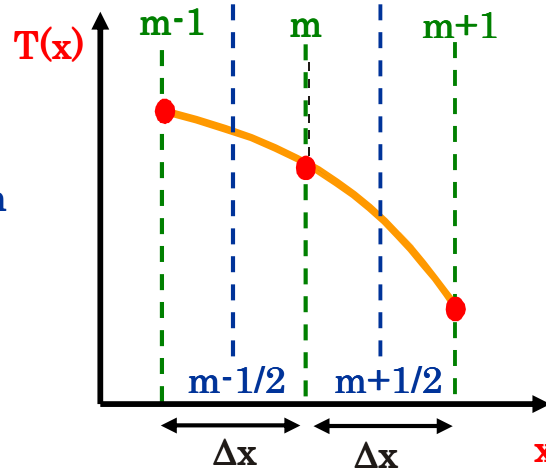
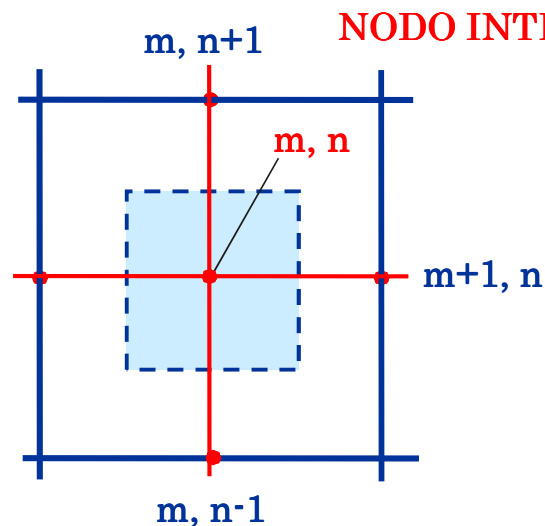
3.2.2.1 Diferencias finitas

- Régimen estacionario.
- Sin generación
- Conducción bidimensional

E.G.C.E



$$\nabla^2 T = 0 \quad \therefore \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad [76]$$



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{m,n} \approx \frac{\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+1/2,n} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \quad [77]$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m-1/2,n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad [78]$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{m+1/2,n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [79]$$

3.2.2 Ecuaciones nodales

3.2.2.1 Diferencias finitas

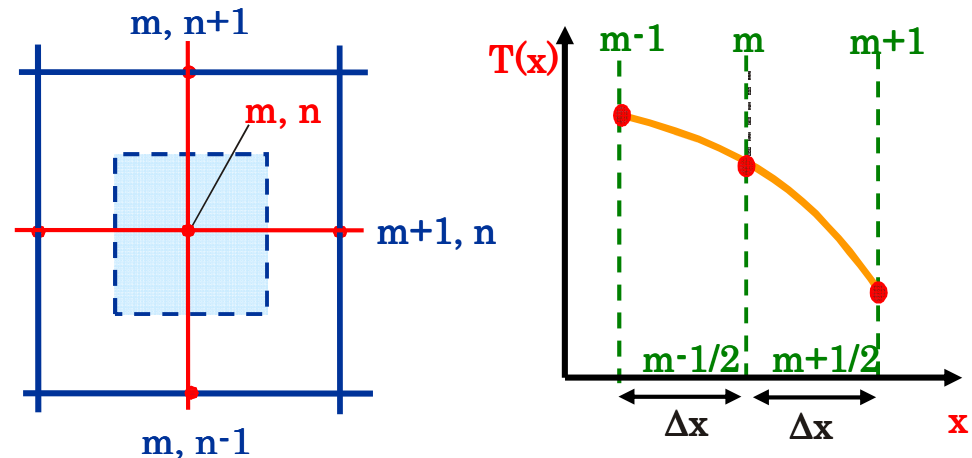
[78], [79] en [77]



$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad [80]$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad [81]$$

$$\boxed{\nabla^2 T = 0 \quad \therefore \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0} \quad [76]$$



$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad [82]$$

$\Delta x = \Delta y$



$$\boxed{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} = 0} \quad [83]$$

Ecuación algebraica

3.2.2 Ecuaciones nodales

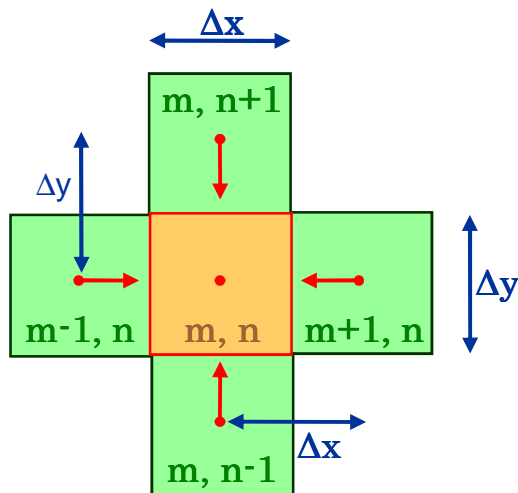
3.2.2.2 Balance de energía

- **Ejemplo:** régimen estacionario con generación
- **Suponer:** flujo de calor hacia el nodo

Energía (neta) que entra + Energía generada = 0 [84]

$$\sum_{i=1}^4 Q_{i \rightarrow m,n} + G \cdot (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) = 0 \quad [85]$$

Nodo interno con generación



$$Q_{m-1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [86]$$

$$Q_{m+1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [87]$$

$$Q_{m,n-1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [88]$$

$$Q_{m,n+1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [89]$$

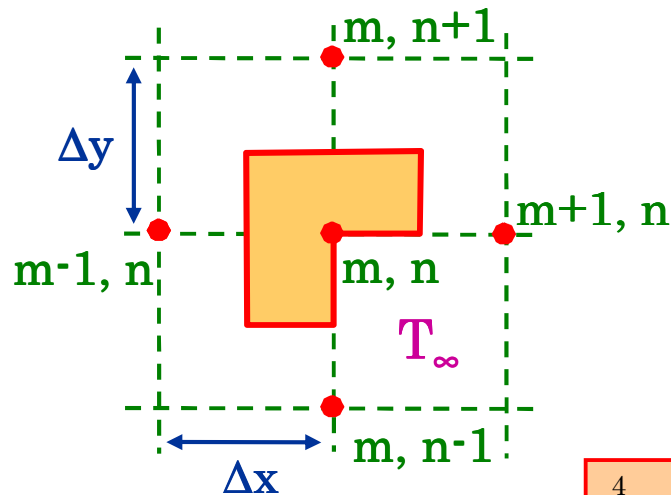
$\Delta x = \Delta y$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} + G \cdot \frac{\Delta x^2}{k} = 0 \quad [90] \quad G=0 \rightarrow [83]$$

3.2.2 Ecuaciones nodales

3.2.2.2 Balance de energía

Nodo esquina interna con convección
(sin generación)



$$Q_{m-1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y \cdot 1) \cdot \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [91]$$

$$Q_{m+1,n \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta y / 2 \cdot 1) \cdot \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad [92]$$

$$Q_{m,n-1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x / 2 \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [93]$$

$$Q_{m,n+1 \rightarrow m,n} = k \cdot (\Delta x \cdot 1) \cdot \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad [94]$$

$$Q_{\infty \rightarrow m,n} = h \cdot (\Delta x / 2) \cdot (T_{\infty} - T_{m,n}) + h \cdot (\Delta y / 2) \cdot (T_{\infty} - T_{m,n}) \quad [95]$$

$$\sum_{i=1}^4 Q_{i \rightarrow m,n} + G \cdot \frac{3}{4} (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z) = 0 \quad [85]$$

$$G = 0$$

$$\Delta x = \Delta y$$

$$T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + 0,5 \cdot T_{m+1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(3 + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \right) \cdot T_{m,n} = 0 \quad [96]$$

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

3.2.2 Ecuaciones nodales

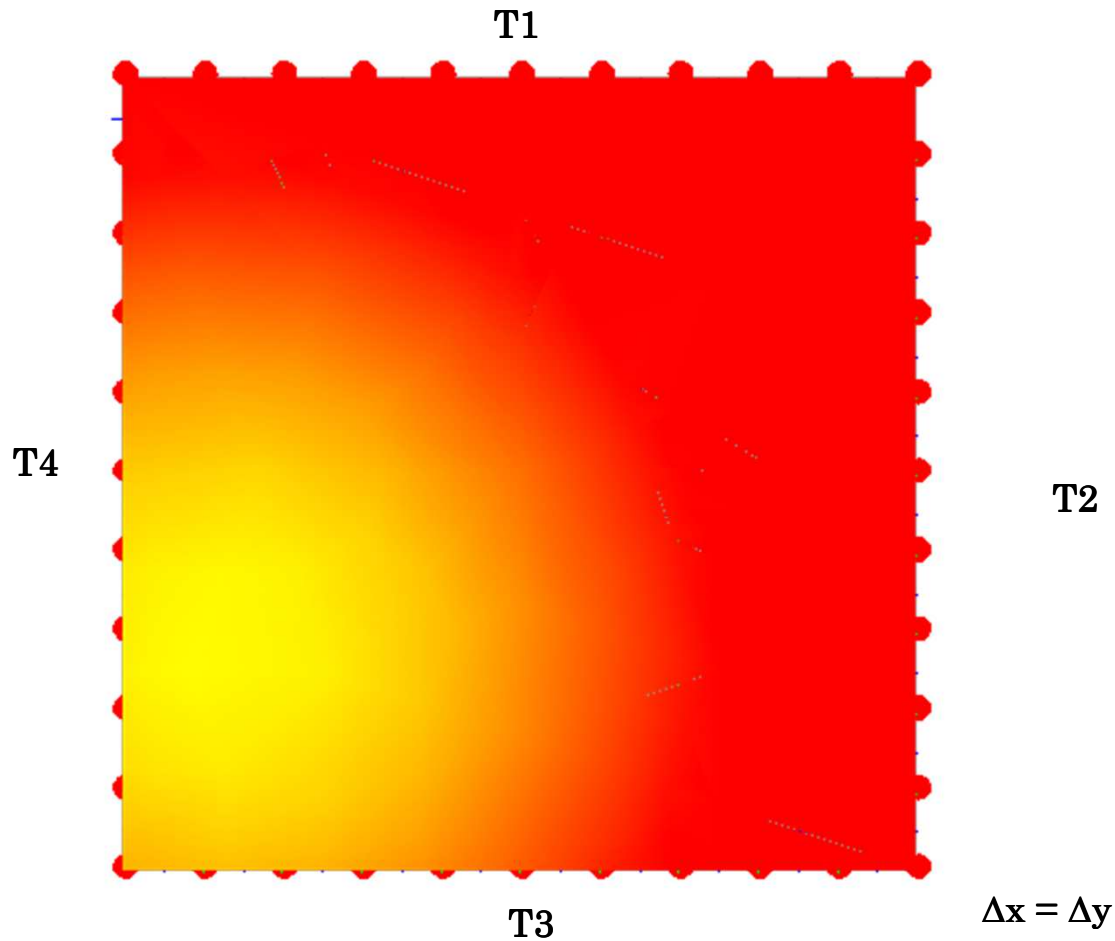
Configuración	Ecuación en diferencias finitas ($\Delta x = \Delta y$; $G=0$)
	<p>Nodo en esquina interna con convección</p> $T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + 0,5 \cdot T_{m+1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(3 + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana con convección</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(2 + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en esquina externa con convección</p> $0,5 \cdot T_{m-1,n} + 0,5 \cdot T_{m,n-1} + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \cdot T_{\infty} - \left(1 + \frac{h \cdot \Delta x}{k} \right) \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana con flujo constante</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{q' \cdot \Delta x}{k} - 2 \cdot T_{m,n} = 0$
	<p>Nodo en superficie plana adiabática ($Q'=0$)</p> $T_{m-1,n} + 0,5 \cdot (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - 2 \cdot T_{m,n} = 0$

3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Resumen de construcción de redes nodales

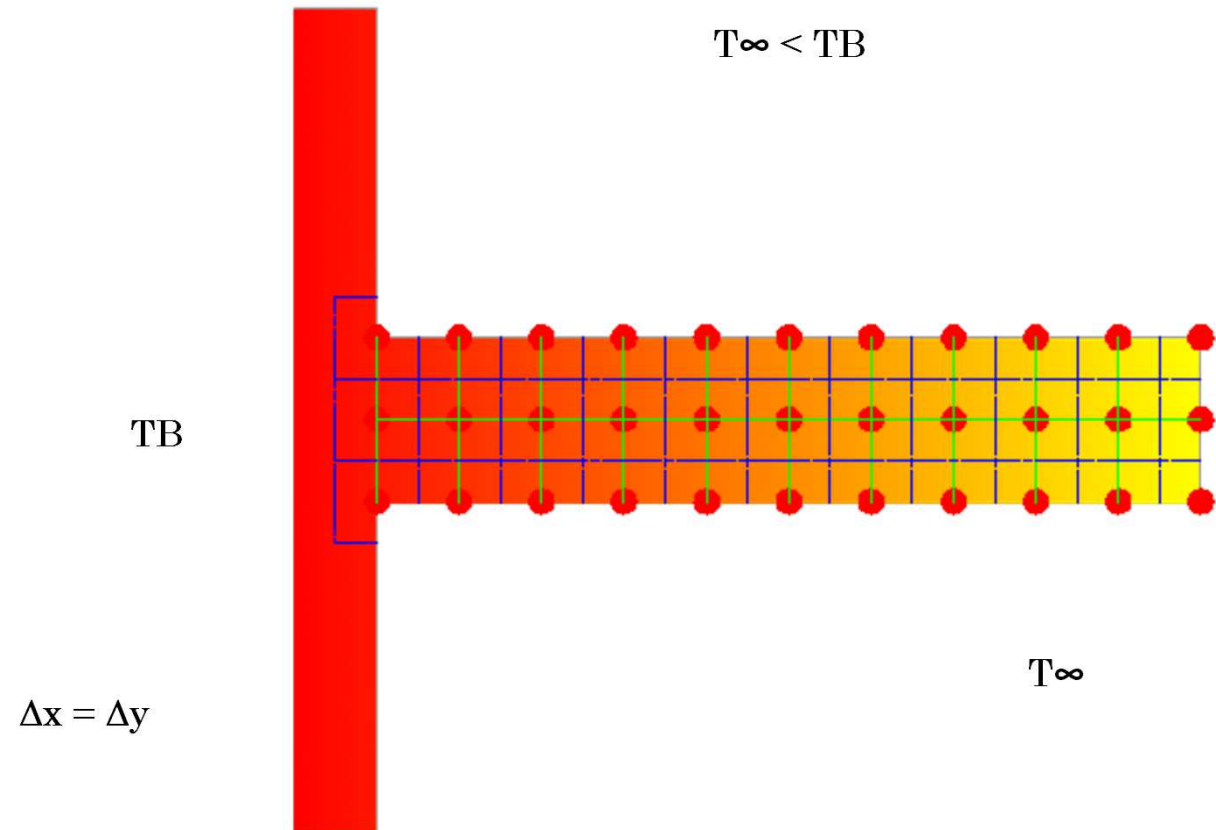
$$T1 \approx T2 \gg T3 \approx T4$$



3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

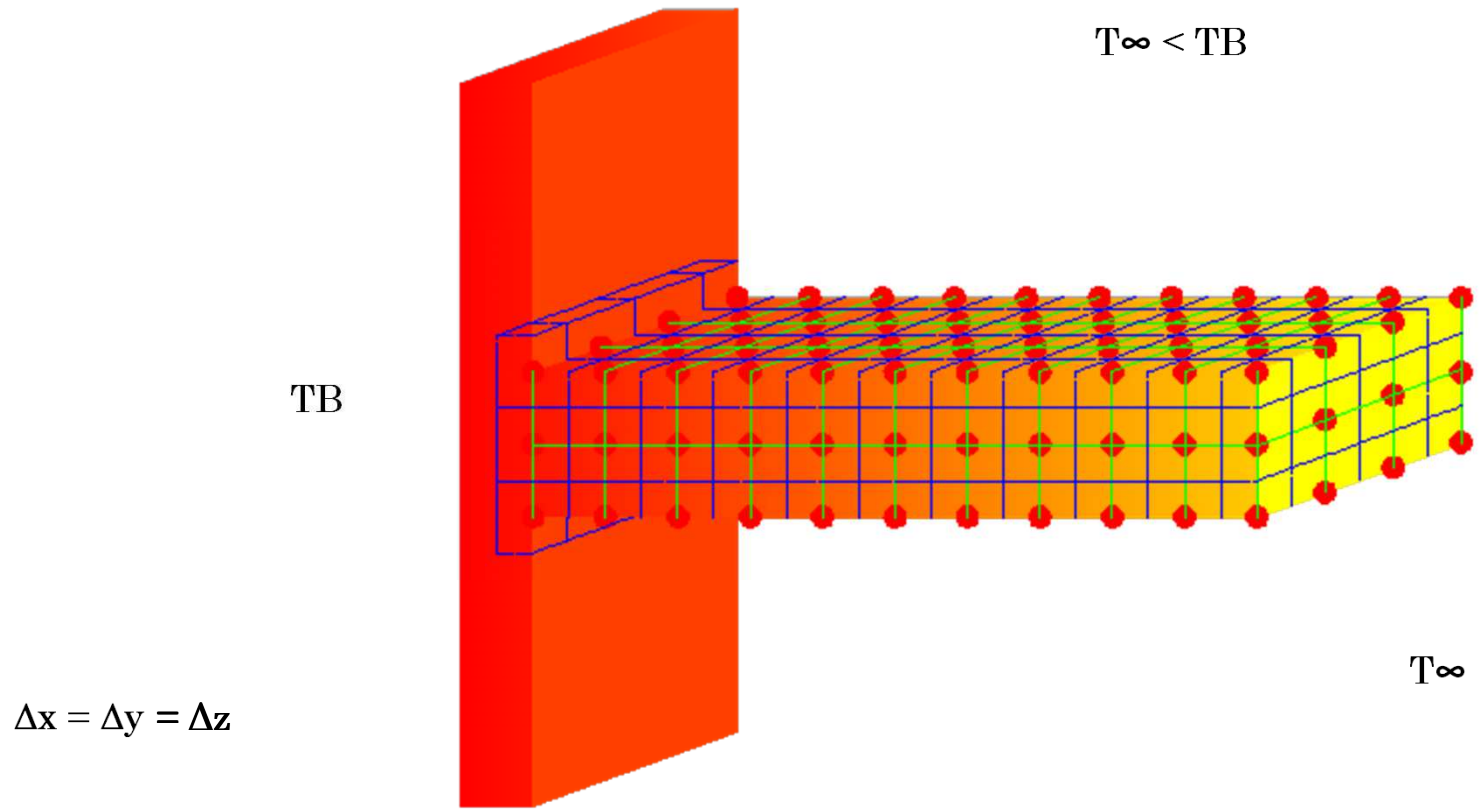
Resumen de construcción de redes nodales



3. RÉGIMEN ESTACIONARIO MULTIDIMENSIONAL

3.2 Método numérico: diferencias finitas

Resumen de construcción de redes nodales



3.2.3 Solución de las ecuaciones

Ecuación diferencial



Sistema de N ecuaciones algebraicas

N = número de nodos

✓ Métodos de solución del sistema de ecuaciones:

- Directos (N no muy elevado)
- Indirectos o iterativos (N elevado)

3.2.3.1 Método de inversión de matrices

Sistema de N ecuaciones con N incógnitas

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot T_1 + a_{12} \cdot T_2 + a_{13} \cdot T_3 + \dots + a_{1N} \cdot T_N &= C_1 \\
 a_{21} \cdot T_1 + a_{22} \cdot T_2 + a_{23} \cdot T_3 + \dots + a_{2N} \cdot T_N &= C_2 \\
 \vdots & \\
 a_{N1} \cdot T_1 + a_{N2} \cdot T_2 + a_{N3} \cdot T_3 + \dots + a_{NN} \cdot T_N &= C_{N2}
 \end{aligned}$$

[97]



$$[A][T] = [C] \quad [98]$$



Solución

[100]



$$[T] = [A]^{-1} [C] \quad [99]$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= b_{11} \cdot C_1 + b_{12} \cdot C_2 + b_{13} \cdot C_3 + \dots + b_{1N} \cdot C_N \\
 T_2 &= b_{21} \cdot C_1 + b_{22} \cdot C_2 + b_{23} \cdot C_3 + \dots + b_{2N} \cdot C_N \\
 \vdots & \\
 T_N &= b_{N1} \cdot C_1 + b_{N2} \cdot C_2 + b_{N3} \cdot C_3 + \dots + b_{NN} \cdot C_N
 \end{aligned}$$

3.2.3.2 Método de iteración de Gauss-Seidel

1. Reorganizar ecuaciones nodales

$$\boxed{|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{13}|, \dots, |a_{1N}|} \quad \boxed{|a_{22}| > |a_{21}|, |a_{23}|, \dots, |a_{2N}|} \quad \boxed{|a_{NN}| > |a_{N1}|, |a_{N3}|, \dots, |a_{NN}|} \quad [101]$$

2. Despejar la temperatura de cada elemento diagonal

$$\boxed{T_i = \frac{C_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1, j \neq i}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j} \quad [102]$$

3. Suponer una distribución inicial de temperaturas (k=0)

$$\boxed{T_1^{k=0} \quad T_2^{k=0} \quad T_3^{k=0} \quad \dots \quad T_N^{k=0}}$$

4. Calcular una nueva distribución de temperaturas (k=k+1)

$$\boxed{T_i^k = \frac{C_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot T_j^k - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot T_j^{k-1}} \quad [103]$$

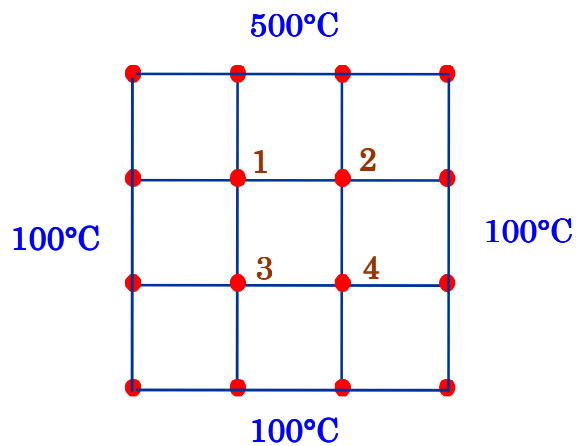
5 Comprobar la convergencia

$$\boxed{|T_i^k - T_i^{k-1}| \leq \varepsilon} \quad [104]$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} \cdot T_1 + a_{12} \cdot T_2 + a_{13} \cdot T_3 + \dots + a_{1N} \cdot T_N &= C_1 \\
 a_{21} \cdot T_1 + a_{22} \cdot T_2 + a_{23} \cdot T_3 + \dots + a_{2N} \cdot T_N &= C_2 \\
 \vdots & \\
 a_{N1} \cdot T_1 + a_{N2} \cdot T_2 + a_{N3} \cdot T_3 + \dots + a_{NN} \cdot T_N &= C_{N2}
 \end{aligned} \quad [97]$$

3.2.3 Solución de las ecuaciones

3.2.3.1 Método de iteración de Gauss-Seidel



1. Red nodal

2. Ecuaciones nodales:

- Nodos internos: 1, 2, 3, 4

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4 \cdot T_{m,n} = 0$$

$$500 + 100 + T_3 + T_2 - 4 \cdot T_1 = 0$$

$$500 + T_1 + T_4 + 100 - 4 \cdot T_2 = 0$$

$$T_1 + 100 + 100 + T_4 - 4 \cdot T_3 = 0$$

$$T_2 + T_3 + 100 + 100 - 4 \cdot T_4 = 0$$

3. Reorganización

$$4 \cdot T_1 - T_2 - T_3 + 0 = 600$$

$$-T_1 + 4 \cdot T_2 + 0 - T_4 = 600$$

$$-T_1 + 0 + 4 \cdot T_3 - T_4 = 200$$

$$0 - T_2 - T_3 + 4 \cdot T_4 = 200$$

5. Resolución

K	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
0	300,0	300,0	200,0	200,0
1	275,0	268,8	168,8	159,4
2	259,4	254,7	154,7	152,3
3	252,3	251,2	151,2	150,6
4	250,6	250,3	150,3	150,1
5	250,1	250,1	150,1	150,1
6	250,0	250,0	150,0	150,0

$$T_1 = \frac{600 + T_2 + T_3}{4}$$

$$T_2 = \frac{600 + T_1 + T_4}{4}$$

$$T_3 = \frac{200 + T_1 + T_4}{4}$$

$$T_4 = \frac{200 + T_2 + T_3}{4}$$

4. Despejar temperaturas

ÍNDICE

1. Introducción
2. Régimen estacionario unidimensional
 - 2.1 Geometrías sencillas
 - 2.2 Sólidos en serie
 - 2.3 Superficies extendidas
3. Régimen estacionario multidimensional
 - 3.1 Método gráfico aproximado
 - 3.2 Método numérico
4. Régimen no estacionario
 - 4.1 Método analítico
 - 4.2 Método numérico

✓ Transmisión de calor en régimen no estacionario:

- **Generalmente:** cambio en las condiciones límite del sistema
- **Ecuación de conservación:**

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4]$$

- **Solución analítica:** 2 variables y geometría sencilla (Reg. no estacionario: unidimensional)

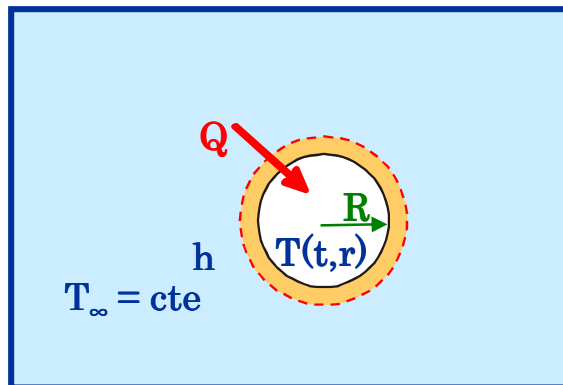
✓ Solución de la ecuación:

- **Método analítico.**
 - Resistencia interna despreciable.
 - Resistencia interna no despreciable.
- **Sólido semiinfinito.**
- **Método numérico.**
 - Método explícito.
 - Método implícito.

✓ Aplicación

Conducción unidimensional.

Ejemplo: calentamiento de un sólido por inmersión en un fluido caliente.

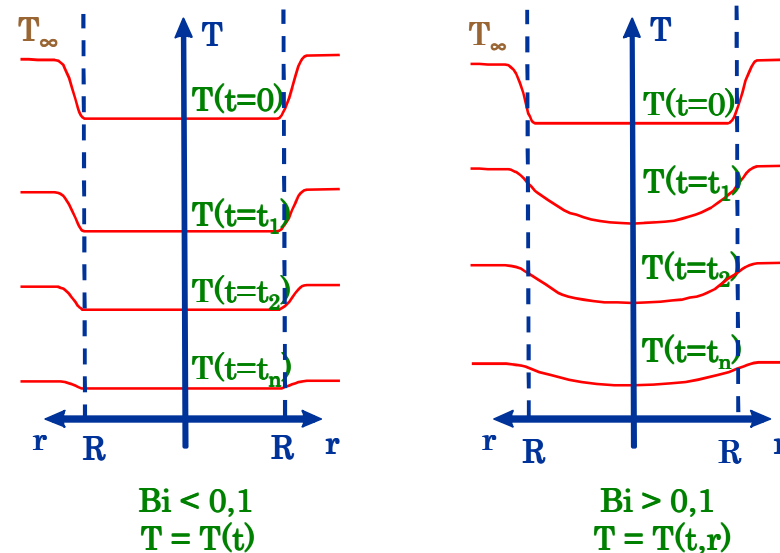


Resistencias en serie:

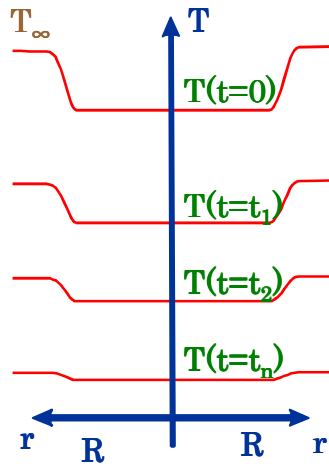
- **Externa:** fluido (convección)
- **Interna:** sólido (conducción)

Número de Biot

$$Bi = \frac{R_{int}}{R_{ext}} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{h \cdot L_c}{k} \quad [105]$$



4.1.1 Resistencia interna despreciable ($Bi < 0,1$)



✓ Balance de energía

$$\rho \cdot c_p \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = h \cdot A \cdot (T_\infty - T) \quad [106] \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{(T_\infty - T)} = \frac{h \cdot A}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot dt \quad [107]$$

✓ Integrando:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{(T_\infty - T)} = \frac{h \cdot A}{\rho \cdot c_p \cdot V} \cdot \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \exp\left(-\frac{h \cdot A \cdot t}{\rho \cdot c_p \cdot V}\right) \quad [108]$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_0} = \exp\left(-\frac{h}{\rho \cdot c_p \cdot L_C} \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{L_C}{L_C} \cdot t\right) = \exp\left(-\frac{h \cdot L_C}{k} \cdot \frac{\alpha \cdot t}{L_C^2}\right) = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad [109]$$

• Número de Fourier: $Fo = \alpha t / L_C^2$

• Difusividad térmica: $\alpha = k / \rho c_p$

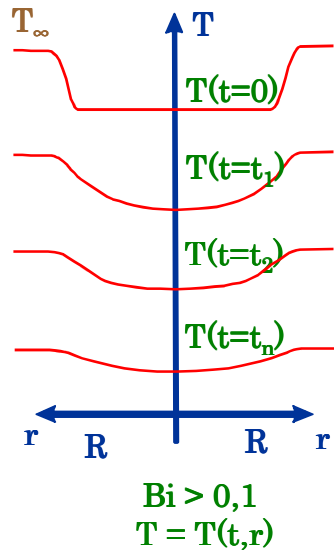
• Longitud característica (esfera): $L_C = \frac{V}{A} = \frac{4/3 \cdot \pi \cdot R^3}{4 \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{R}{3}$ [110]

✓ Caudal de calor:

• Instantáneo (t): $Q(t) = h \cdot A \cdot (T_\infty - T(t)) = h \cdot A \cdot \theta(t) = h \cdot A \cdot \theta_0 \exp(-Bi \cdot Fo(t))$ [111]

• Total ($0 \rightarrow t$): $Q = \int_0^t Q(t) \cdot dt = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot \theta_0 \cdot [1 - \exp(-Bi \cdot Fo(t))]$ [112]

4.1.2 Resistencia interna no despreciable ($Bi > 0,1$)



$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G \quad [4] \quad \begin{matrix} k = \text{cte} \\ G = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T \quad [113]$$

✓ Modelo matemático: sólido esférico sumergido en baño

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad [114]$$

$$t = 0 : R \geq r \geq 0 : T = T_0 \quad [115]$$

$$t > 0 : r = 0 : \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0 \quad [116]$$

$$t > 0 : r = R : -k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h \cdot (T_\infty - T_{r=R}) \quad [117]$$

✓ Solución del perfil:

- Forma de series
- Temperatura (θ) y posición adimensional (ξ)
- Números adimensionales (Bi y Fo)

Caudal de calor



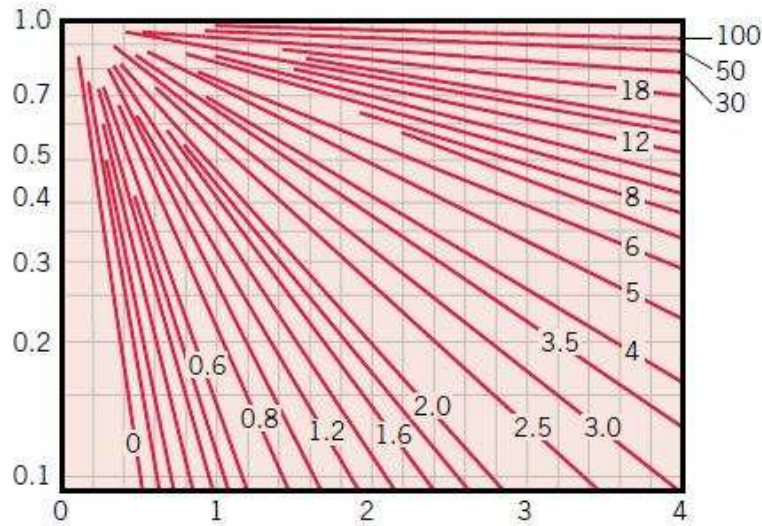
4.1.2 Resistencia interna no despreciable ($Bi > 0,1$)

Geometría	Solución analítica rigurosa	Solución aproximada ($Fo > 0,2$)
Pared plana (x) espesor = $2x_1$ $\xi = x/x_1$ $Bi = \frac{hx_1}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{x_1^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) \cos(\lambda_N \xi) \quad (1)$ $C_N = \frac{4 \operatorname{sen}(\lambda_N)}{2\lambda_N + \operatorname{sen}(2\lambda_N)}$ $\lambda_N \operatorname{tg}(\lambda_N) = Bi$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) \cos(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 \cos(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{\operatorname{sen}(\lambda_1)}{\lambda_1} \theta_0 \quad (3)$
Cilindro (r) radio cilindro = R_0 $\xi = r/R_0$ $Bi = \frac{hR_0}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{R_0^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) J_0(\lambda_N \xi)$ $C_N = \frac{2}{\lambda_N} \frac{J_1(\lambda_N)}{J_0^2(\lambda_N) + J_1^2(\lambda_N)} \quad (4)$ $\lambda_N \frac{J_1(\lambda_N)}{J_0(\lambda_N)} = Bi \quad (4)$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) J_0(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 J_0(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{2\theta_0}{\lambda_1} J_1(\lambda_1) \quad (3,4)$
Esfera (r) radio esfera = R_0 $\xi = r/R_0$ $Bi = \frac{hR_0}{k}$ $Fo = \frac{\alpha t}{R_0^2}$	$\theta = \sum_{N=1}^{\infty} C_N \exp(-\lambda_N^2 Fo) \frac{1}{\lambda_N \xi} \operatorname{sen}(\lambda_N \xi)$ $C_N = \frac{4(\operatorname{sen}(\lambda_N) - \lambda_N \cos(\lambda_N))}{2\lambda_N + \operatorname{sen}(2\lambda_N)}$ $1 - \lambda_N \cot(\lambda_N) = Bi$	$\theta = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) \frac{1}{\lambda_1 \xi} \operatorname{sen}(\lambda_1 \xi)$ o, $\theta = \theta_0 \frac{1}{\lambda_1 \xi} \operatorname{sen}(\lambda_1 \xi) \quad (2)$ $\frac{Q}{Q_{\text{Ref}}} = 1 - \frac{3\theta_0}{\lambda_1^3} [\operatorname{sen}(\lambda_1) - \lambda_1 \cos(\lambda_1)] \quad (3)$

$$Q_{\text{Ref}} = \rho \cdot c_p \cdot V \cdot (T_{\infty} - T_0)$$

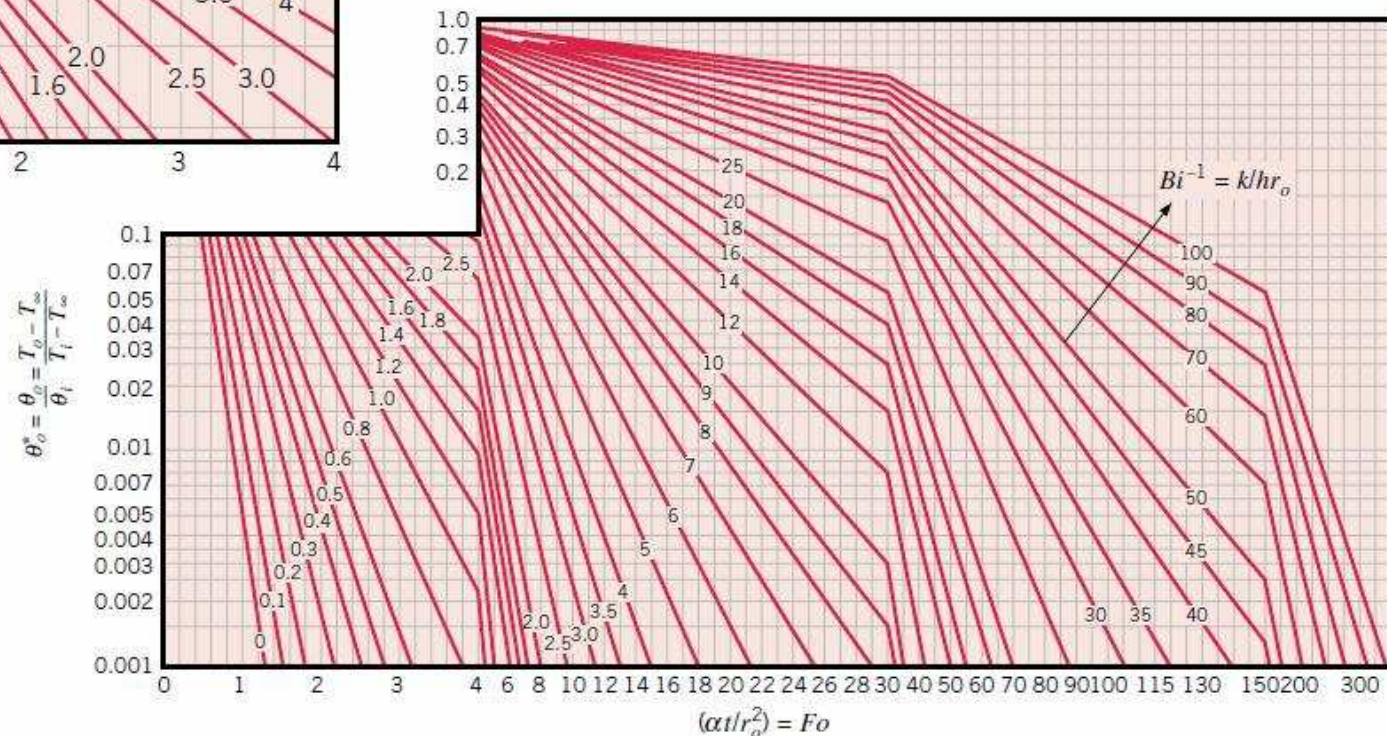
[118]

4.1.2 Resistencia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler

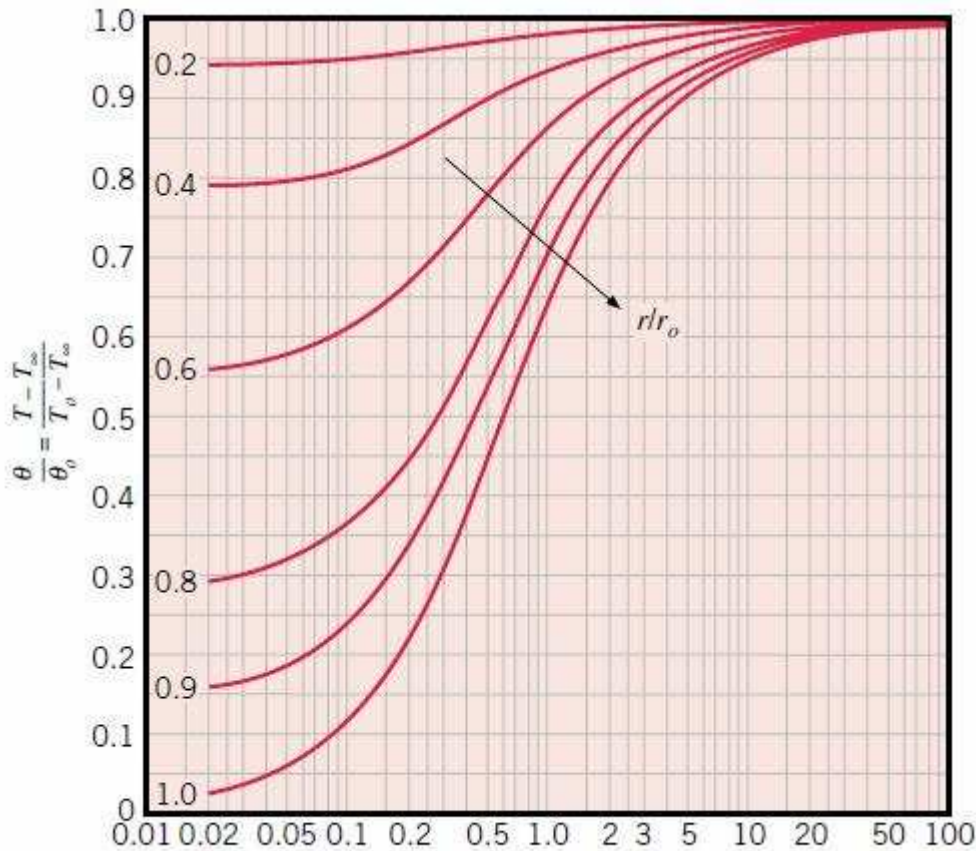


Debe cumplirse que :

- T_0 constante y homogénea en el sólido
- k, T_∞ constantes y homogéneas en el fluido
- Ausencia de generación de calor en el sólido

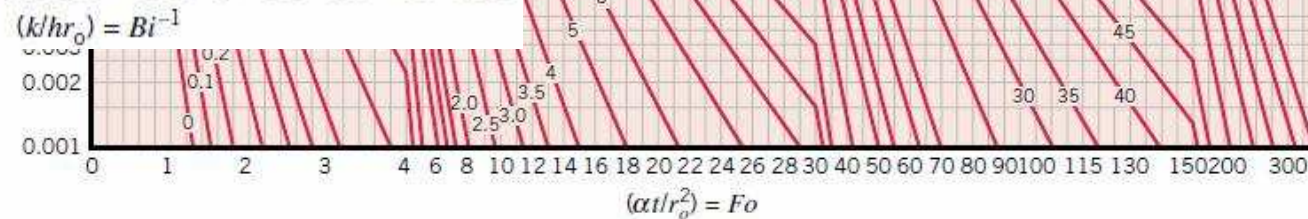


4.1.2 Resistencia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler

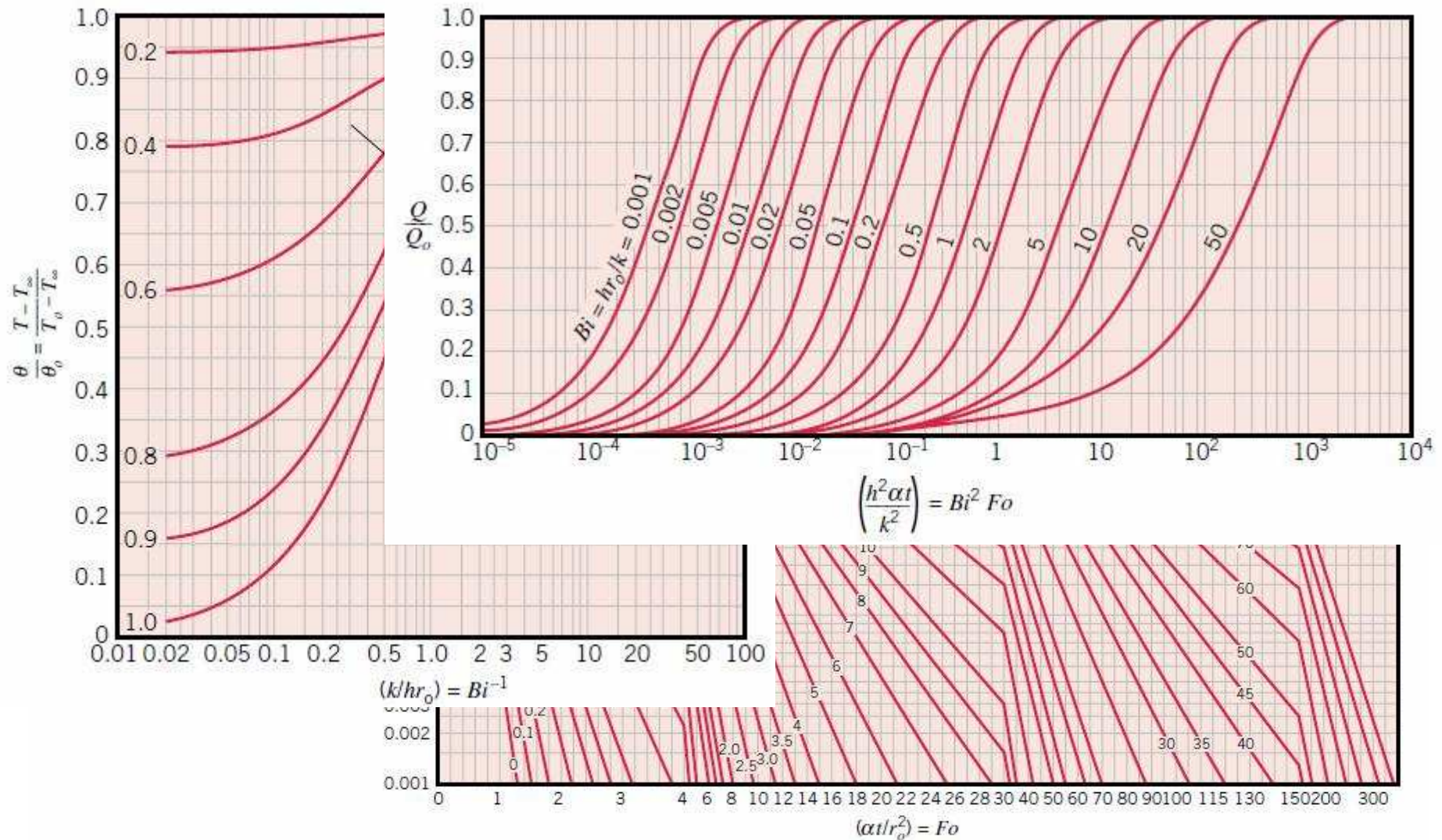


Debe cumplirse que :

- T_0 constante y homogénea en el sólido
- k, T_∞ constantes y homogéneas en el fluido
- Ausencia de generación de calor en el sólido



4.1.2 Resistencia interna no despreciable ($Bi > 0,1$). Gráficas de Heisler



4.2.1 Método explícito

✓ Ejemplo

- Bidimensional
- Sin generación
- Coordenadas rectangulares
- Conductividad constante

[4]

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(-k \cdot \nabla T) + G$$

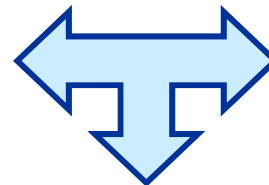


$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [125]$$

Derivadas espaciales

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad [80]$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2 \cdot T_{m,n}}{(\Delta y)^2} \quad [81]$$



Derivada temporal

$$t = p \cdot \Delta t \quad [126]$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \quad [127]$$

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} \quad [128]$$

$$\Delta x = \Delta y \quad \text{Fo} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \quad [130]$$

$$T_{m,n}^{p+1} = \text{Fo} \cdot (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4 \cdot \text{Fo}) \cdot T_{m,n}^p \quad [129]$$

4.2.1 Método explícito

$$T_{m,n}^{p+1} = FO \cdot (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4 \cdot FO) \cdot T_{m,n}^p \quad [\text{ca 129}]$$

1
dimensión

$$T_{m,n}^{p+1} = FO \cdot (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2 \cdot FO) \cdot T_m^p \quad [131]$$

Ecuaciones explícitas

$$T_i^p \Rightarrow T_i^{p+1}$$

✓ Proceso de cálculo:

- $p=0 \rightarrow$ Temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = 0$
- $p=1 \rightarrow$ Temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = \Delta t$
- $p=2 \rightarrow$ Temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = 2 \Delta t$
-
- $p=? \rightarrow$ Temperaturas ($T_{m,n}$) a $t = t_{\text{Final}}$

✓ Precisión:

- Depende de Δx , Δy y Δt
- A menor valor del incremento:
 - Mayor precisión
 - Mayor tiempo de cálculo

✓ Proceso de cálculo:

- El método explícito converge para determinados valores del incremento de tiempo (hay un valor máximo por encima del cual no converge la solución).

4.2.1 Método explícito

Convergencia de la solución

- Elección incrementos espaciales: compromiso entre precisión y requerimientos de cálculo.
- Elección incremento temporal: criterio de estabilidad de la solución.

✓ Criterio de estabilidad:

El valor del coeficiente asociado con la temperatura del nodo de interés en el tiempo anterior, p , deber ser mayor o igual que cero.

✓ Ejemplo: sistema bidimensional y nodo interior:

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo \cdot (T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^p \quad [\text{ca } 129]$$

$$Fo \leq \frac{1}{4} \quad [132]$$

✓ Ejemplo: sistema unidimensional y nodo interior:

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo \cdot (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot T_m^p \quad [\text{ca } 131]$$

$$Fo \leq \frac{1}{2} \quad [133]$$

4.2.1 Método explícito

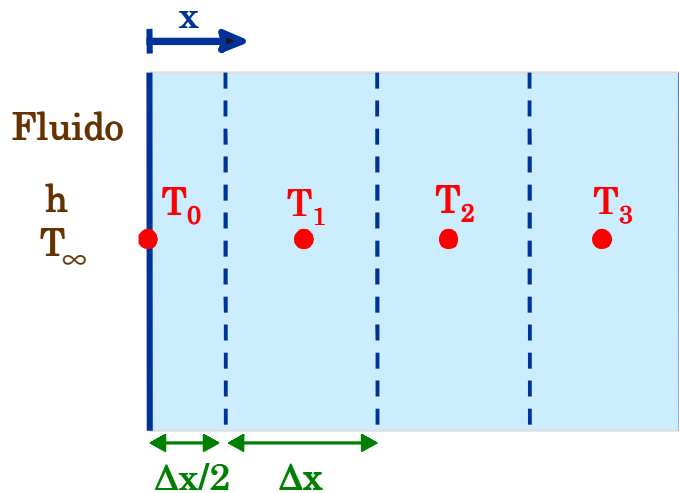
Balance de energía

Balance de energía:

E. (neta) que entra + E. generada = E. acumulada

✓ Nodo exterior:

Unidimensional
Sin generación
Coordenadas rectangulares



$$h \cdot A \cdot (T_\infty - T_0^p) + \frac{k \cdot A}{\Delta x} \cdot (T_1^p - T_0^p) = \rho \cdot c_p \cdot A \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{T_0^{p+1} - T_0^p}{\Delta t} \quad [134]$$



$$T_0^{p+1} = \frac{2 \cdot h \cdot \Delta t}{\rho \cdot c_p \cdot \Delta x} \cdot (T_\infty - T_0^p) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot (T_1^p - T_0^p) + T_0^p \quad [135]$$



$$Bi = \frac{h \cdot \Delta x}{k} \quad [137]$$

$$T_0^{p+1} = 2 \cdot Fo \cdot (T_1^p + Bi \cdot T_\infty) + (1 - 2 \cdot Fo - 2 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_0^p \quad [136]$$

Criterio de estabilidad

$$Fo \cdot (1 + Bi) \leq 1/2 \quad [138]$$

✓ Nodo interior (ya visto):

$$T_m^{p+1} = Fo \cdot (T_{m+1}^p + T_{m-1}^p) + (1 - 2 \cdot Fo) \cdot T_m^p \quad [\text{ca } 131] \quad Fo \leq \frac{1}{2} \quad [133]$$

4.2.2 Método implícito

✓ Ejemplo

- Bidimensional
- Sin generación
- Coordenadas rectangulares
- Conductividad constante

[4]

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k \cdot \nabla T) + G$$



$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad [125]$$

Explícito

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p - 2 \cdot T_{m,n}^p}{(\Delta y)^2} \quad [128]$$

Implícito

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} = \frac{T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} - 2 \cdot T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1} - 2 \cdot T_{m,n}^{p+1}}{(\Delta y)^2} \quad [139]$$

↓ $\Delta x = \Delta y$

$$(1 + 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^{p+1} - Fo \cdot (T_{m+1,n}^{p+1} + T_{m-1,n}^{p+1} + T_{m,n+1}^{p+1} + T_{m,n-1}^{p+1}) = T_{m,n}^p \quad [140]$$

✓ Balance de energía

Unidimensional

$$\left. \begin{aligned} \text{Nodo superficial} \quad & (1 + 2 \cdot Fo + 2 \cdot Fo \cdot Bi) \cdot T_0^{p+1} - 2 \cdot Fo \cdot T_1^{p+1} = 2 \cdot Fo \cdot Bi \cdot T_\infty + T_0^p \quad [141] \\ \text{Nodo interior} \quad & (1 + 2 \cdot Fo) \cdot T_m^{p+1} - Fo \cdot (T_{m-1}^{p+1} + T_{m+1}^{p+1}) = T_m^p \quad [142] \end{aligned} \right\}$$

4. RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

4.2 Método numérico

Configuración	Método explícito		Método implícito
	Ecuación ($\Delta x = \Delta y$; $G=0$)	Criterio estabilidad	
	$T_{m,n}^{P+1} = Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^P + T_{m-1,n}^P + T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P \right) + (1 - 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \leq \frac{1}{4}$	$(1 + 4 \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^{P+1} - Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^{P+1} + T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P$
	$T_{m,n}^{P+1} = \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^P + 2T_{m-1,n}^P + 2T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + \left(1 - 4 \cdot Fo - \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo \right) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (3 + Bi) \leq \frac{3}{4}$	$\left[1 + 4 \cdot Fo \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot Bi \right) \right] \cdot T_{m,n}^{P+1} - \frac{2}{3} \cdot Fo \cdot \left(T_{m+1,n}^{P+1} + 2T_{m-1,n}^{P+1} + 2T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + \frac{4}{3} \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$
	$T_{m,n}^{P+1} = Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^P + T_{m,n+1}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + (1 - 4 \cdot Fo - 2 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (2 + Bi) \leq \frac{1}{2}$	$\left([1 + 2 \cdot Fo \cdot (2 + Bi)] \right) \cdot T_{m,n}^{P+1} - Fo \cdot \left(2T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n+1}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + 2 \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$
	$T_{m,n}^{P+1} = 2 \cdot Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^P + T_{m,n-1}^P + 2 \cdot Bi \cdot T_{\infty} \right) + (1 - 4 \cdot Fo - 4 \cdot Bi \cdot Fo) \cdot T_{m,n}^P$	$Fo \cdot (1 + Bi) \leq \frac{1}{4}$	$[1 + 4 \cdot Fo \cdot (1 + Bi)] \cdot T_{m,n}^{P+1} - 2 \cdot Fo \cdot \left(2 \cdot T_{m-1,n}^{P+1} + T_{m,n-1}^{P+1} \right) = T_{m,n}^P + 4 \cdot Bi \cdot Fo \cdot T_{\infty}$